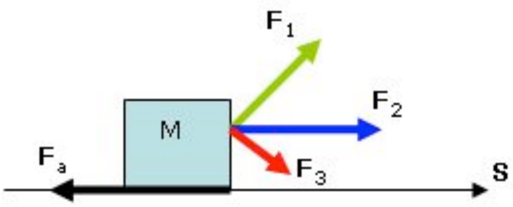
Problemi di Fisica

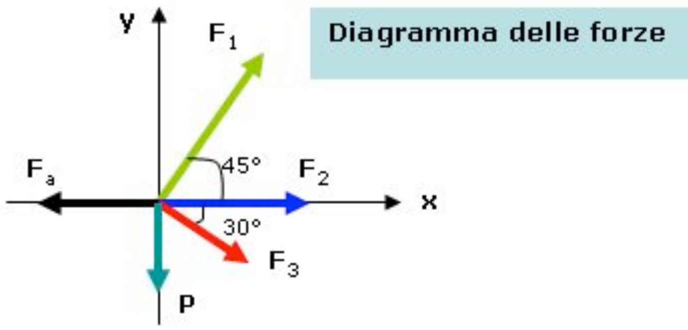
Principio conservazione energia meccanica

PROBLEMA

Su un corpo di massa M=10kg agiscono una serie di forze F_1=10N F_2=5N F_3=7N F_a=2N (forza di attrito), secondo le direzioni indicate in figura, che lo spostano di 10m. Supponendo che il corpo inizialmente è fermo, calcolare la velocità finale.

SOLUZIONE





Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

(1) $L_T = \Delta E_C = E_{CF} - E_{CI} = \frac{1}{2}Mv_F^2 - \frac{1}{2}Mv_I^2$ dove: $L_T = \sum L_i = L_1 + L_2 + L_3 + L_a$

e risolvendo la (1) rispetto alla velocità, sapendo che inizialmente il corpo è fermo, si ottiene:

$$(2) \qquad v = \sqrt{\frac{2L_T}{M}}$$

Il problema adesso è calcolare il lavoro totale prodotto dalle forze che agiscono sul corpo. Si può procedere in due modi:

1) Calcolare la forza totale e quindi applicare la definizione di lavoro:

$$L_T = \vec{F}_T \bullet \vec{s} = F_T \cdot s \cdot \cos\alpha = 161J$$

dove:

$$F_{Tx} = \sum F_x = F_{1x} + F_2 + F_{3x} - F_a = F_1\cos 45° + F_2 + F_3\cos 30° - F_a = 16.1N$$
$$F_{Ty} = \sum F_y = F_{1y} - F_{2y} + N - P = F_1 sen45° - F_3 sen30° = 3.6N$$
$$F_T = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2} = 16.5N$$
$$tg\alpha = \frac{F_{Ty}}{F_{Tx}} = 0.22 \Rightarrow \alpha = 12.6°$$

Pertanto dall'applicazione della (2) si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{2L_T}{M}} = \sqrt{\frac{2\cdot 161}{10}} = 5,7m/s$$

2) Calcolare il lavoro prodotto dalle singole forze attraverso l'applicazione della definizione di lavoro e quindi sommarli algebricamente:

$$L_T = \sum L_i = L_1 + L_2 + L_3 - L_a + L_N + L_P = 161 J$$

dove:

$$L_1 = \vec{F}_1 \bullet \vec{s} = F_1 \cdot s \cdot \cos 45° = 70.7N \qquad L_2 = \vec{F}_2 \bullet \vec{s} = F_2 \cdot s \cdot \cos 0° = 50N$$
$$L_3 = \vec{F}_3 \bullet \vec{s} = F_3 \cdot s \cdot \cos 30° = 60.6N \qquad L_a = \vec{F}_a \bullet \vec{s} = F_a \cdot s \cdot \cos 180° = -20N$$
$$L_N = \vec{N} \bullet \vec{s} = N \cdot s \cdot \cos 90° = 0N \qquad L_P = \vec{P} \bullet \vec{s} = P \cdot s \cdot \cos 270° = 0N$$

Pertanto dall'applicazione della (2) si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{2L_T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 161}{10}} = 5{,}7 m/s$$

PROBLEMA

Un treno viaggia su un binario orizzontale alla velocità costante di 36 km/h. Supponendo che la locomotiva sviluppi una potenza di 200 kW per mantenere costante la velocità, determinare la forza dovuta agli attriti e alla resistenza dell'aria che si oppone al moto.

SOLUZIONE

Poiché la locomotiva si muove a velocità costante, significa che la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su di essa è nulla e quindi il lavoro totale è nullo; ossia la forza resistente (attrito e resistenza dell'aria) è uguale alla forza motrice sviluppata dal motore del treno, e quindi il lavoro resistente è uguale a quello motore. Pertanto, partendo dalla definizione di potenza, calcoliamo la forza resistente:

$$P = \frac{L}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v \Rightarrow F = \frac{P}{v} = \frac{200 \cdot 10^3}{10} = 2 \cdot 10^4 N$$

dove 36 km/h = 10 m/s

PROBLEMA

Un'automobile di massa 1000 kg accelera da 0 a 100 km/h in 6 s. Qual è la sua potenza, trascurando gli attriti?

In base al teorema dell'energia cinetica sappiamo che il lavoro è legato alla variazione dell'energia cinetica dalla relazione:

$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Sostituendo i dati forniti dal problema e tenendo conto che l'auto parte da ferma ($v_1 = 0$), operando la conversione 100 km/h ≅ 28 m/s, otteniamo:

$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1000\ \text{kg} \cdot (28\ \text{m/s})^2 = 392\,000\ \text{J}$$

e quindi:

$$L = 3{,}92 \cdot 10^5\ \text{J}$$

La potenza del motore vale perciò:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{3{,}92 \cdot 10^5\ \text{J}}{6\ \text{s}} \cong 65\,330\ \text{W} \cong 65\ \text{kW}$$

La potenza che l'auto sviluppa per raggiungere quella velocità è in realtà maggiore, perché il motore, oltre ad accelerare l'auto, deve vincere anche gli attriti, sia interni (motore, meccanismi di trasmissione, ...) sia esterni (asfalto e aria).

PROBLEMA

Quale lavoro compiono le forze di attrito dei freni di un'automobile, durante una frenata, sapendo che l'auto ha massa uguale a 1000 kg, velocità iniziale di 30 m/s e che lo spazio di frenata è uguale a 150 m?
Quanto vale l'intensità media delle forze di attrito?

■ **LEGGI ED EQUAZIONI**

Dalla relazione:

$$L = \Delta E_C = E_{CF} - E_{CI} = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_I^2$$

conoscendo la massa, la velocità iniziale e quella finale dell'auto si può ricavare il lavoro. Quindi, dalla relazione:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\, s \cos\alpha$$

conoscendo il lavoro, lo spostamento e l'angolo (uguale a 180°, perché la forza di attrito è parallela allo spostamento, ma di verso opposto) si ottiene l'intensità della forza.

■ **SOLUZIONE ALGEBRICA**

Le equazioni che permettono la soluzione del problema sono dunque:

$$L = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad \text{e} \qquad F = \frac{L}{s\cos\alpha}$$

dove F rappresenta l'intensità della forza di attrito.

■ **SOLUZIONE NUMERICA**

Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$L = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1000\ \text{kg} \cdot (30\ \text{m/s})^2 = -450\,000$$

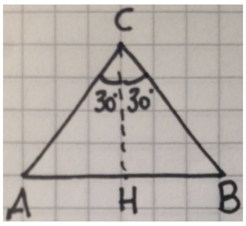
e quindi:

$$F = \frac{L}{s\cos\alpha} = \frac{-450\,000\ \text{J}}{150\ \text{m} \cdot (-1)} = 3000\ \text{N}$$

PROBLEMA

Sotto l'azione di una forza conservativa **F** di intensità pari a 260 N, un corpo materiale di massa 50 kg descrive una arco di circonferenza come quello in figura, di ampiezza 60° e raggio 2,8 m. Se il corpo ha inizialmente velocità nulla, quanto vale la sua velocità alla fine del percorso?

SOLUZIONE



Il triangolo ABC è equilatero. Infatti:

$$HB = BC \cdot sen30° = \frac{1}{2}R \qquad AB = 2HB = R$$

Poiché la forza è conservativa, il lavoro compiuto è lo stesso qualunque sia la traiettoria che unisce i punti A e B. Pertanto, scegliendo AB=R come traiettoria, il lavoro compiuto da **F** vale:

$$L = F \cdot AB = F \cdot R = 260 \cdot 2{,}8 = 728\,J$$

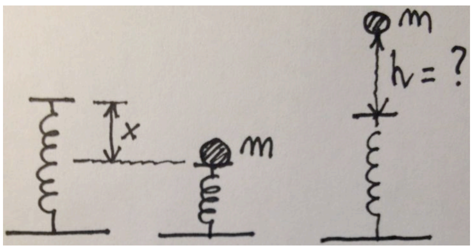
Dal teorema dell'energia cinetica ricaviamo la velocità alla fine del percorso:

$$L = \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2L}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 728}{50}} = 5{,}4\,m/s$$

PROBLEMA

Una sfera è appoggiata su una molla (k=950 N/m), disposta verticalmente e compressa di 14 cm. La massa della sfera è di 400 g, mentre la massa della molla è trascurabile. Calcolare l'altezza raggiunta dalla sfera quando la molla viene liberata. Calcolare la percentuale di energia meccanica dissipata se nel successivo lancio, in seguito alle forze dissipative, la sfera raggiunge la metà dell'altezza precedente.

SOLUZIONE



PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

$$E_{M_i} = E_{M_f}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh \rightarrow h = \frac{kx^2}{2mg} = \frac{950 \cdot 0{,}14^2}{2 \cdot 0{,}4 \cdot 10} = 2{,}3\ m$$

L'energia meccanica, in assenza di forza dissipative, vale:

$$E_M = mgh = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 2{,}3 = 9{,}2\ J$$

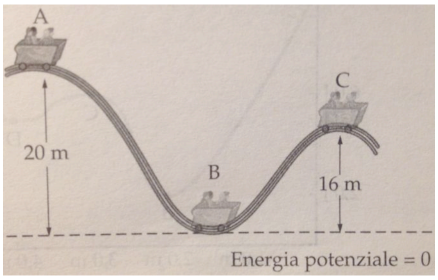
L'energia meccanica, in presenza di forze dissipative che fanno raggiungere alla sfera un'altezza metà della precedente, vale:

$$E_{M_1} = mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}E_M$$

Pertanto, la percentuale di energia meccanica dissipata è pari al 50%.

PROBLEMA

Un vagone delle montagne russe di massa 80 kg ha una velocità di modulo 20 m/s nella posizione A. Calcolare la velocità del vagone quando è nel punto C. Si assuma g=10 m/s^2.



SOLUZIONE

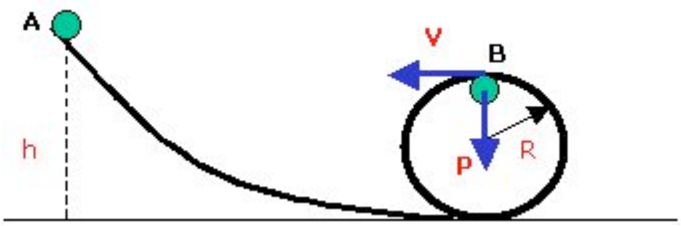
PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

$$E_{M_A} = E_{M_C} \Rightarrow K_A + U_A = K_C + U_C$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 + \cancel{m}gh_1 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_C^2 + \cancel{m}gh_2 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 20^2 + 10\cdot 20 = \frac{1}{2}\cdot v_C^2 + 10\cdot 16 \rightarrow v_C = \sqrt{480} = 21,9\,m/s$$

PROBLEMA

Determinare l'altezza minima dalla quale dovrebbe partire un corpo per percorrere interamente il circuito, nell'ipotesi che strisci senza attrito e che il raggio del cerchio sia 30 cm.



SOLUZIONE

Nel punto A il corpo, essendo fermo, ha solo energia potenziale, mentre in B ha sia energia potenziale che energia cinetica, che gli serve per non cadere e quindi percorrere interamente il circuito. Per calcolare l'altezza h applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica, in quanto l'unica forza in gioco è la forza peso, che è una forza conservativa:

$$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv^2$$

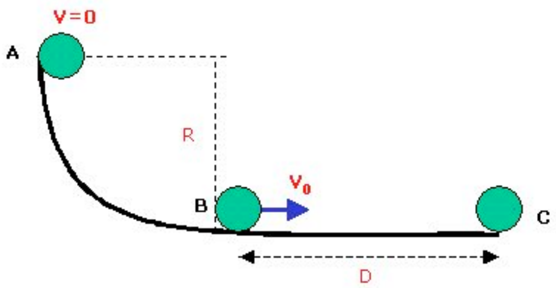
Nel punto B, l'accelerazione centripeta alla quale è soggetto il corpo non è altro che l'accelerazione di gravità, per cui:

$$g = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V^2 = g \cdot R$$

Pertanto, si ottiene:

$$gh = 2gR + \frac{1}{2}gR \Rightarrow h = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2} \cdot 30 = 75cm$$

PROBLEMA



Un corpo di massa m=1 kg viene lasciato andare, con velocità iniziale nulla nel punto A di una superficie avente la forma di un quadrante di cerchio, di raggio R=1,3 m. Esso scivola lungo la curva e raggiunge il punto B con una velocità V_0 = 3,7 m/s. A partire dal punto B scivola su una superficie piana, arrestandosi infine nel punto C, che dista d=2,8 m da B. Calcolare:

- il coefficiente di attrito della superficie piana
- il lavoro compiuto contro le forze d'attrito mentre il corpo scivola lungo il tratto AB

SOLUZIONE

- Lungo il tratto AB, essendoci attrito, vi è una dissipazione di energia, per cui l'energia posseduta nel punto B è minore di quella posseduta nel punto A. La quantità $\Delta E = E_A - E_B$ rappresenterà proprio il lavoro compiuto contro le forze di attrito lungo il tratto AB:

$$L = \Delta E = E_A - E_B = mgR - \frac{1}{2}mV^2 = 1 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3{,}7^2 = 5{,}9J$$

- Per calcolare il coefficiente di attrito della superficie piana ci serve calcolare il lavoro resistente compiuto dalla forza d'attrito. A tal proposito utilizzeremo il:

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$$L = \Delta E_C = E_{C_C} - E_{C_B} = 0 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3{,}7^2 = -6{,}8J$$

Noto L, dalla definizione di lavoro calcoliamo la forza d'attrito:

$$L = F_a \cdot D \Rightarrow F_a = \frac{L}{D} = \frac{6{,}8}{2{,}8} = 2{,}4N$$

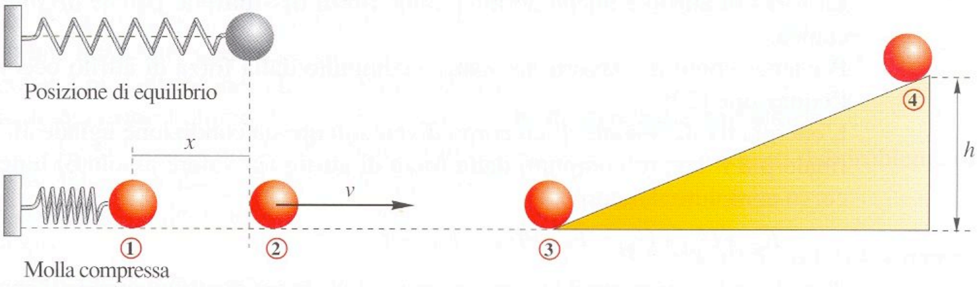
Infine, dalla definizione della forza d'attrito ricaviamo il coefficiente d'attrito:

$$F_a = \mu \cdot P \Rightarrow \mu = \frac{F_a}{P} = \frac{F_a}{m \cdot g} = \frac{2{,}4}{1 \cdot 9{,}8} = 0{,}25$$

PROBLEMA

Una molla compressa di 10 cm, tornando alla sua posizione di equilibrio, lancia lungo un piano orizzontale senza attrito, una pallina di massa m = 200 g. Successivamente la pallina risale lungo un piano inclinato senza attrito. Sapendo che raggiunge l'altezza di 20 cm, quanto vale la costante elastica della molla?

■ MODELLO FISICO



Possiamo distinguere due diverse *trasformazioni di energia*:

– nella prima l'energia potenziale elastica della molla compressa (1) si trasforma in energia cinetica della pallina che si muove lungo il piano orizzontale (2) con velocità v;

– nella seconda l'energia cinetica della pallina si trasforma, risalendo il piano inclinato (3), in energia potenziale gravitazionale (4).

■ LEGGI ED EQUAZIONI

In base alla legge generale di conservazione dell'energia meccanica possiamo scrivere:

$$E_C + U_G + U_E = \text{costante}$$

e applicarla separatamente alle due trasformazioni di energia.

Poiché tuttavia il problema ci chiede solamente di determinare la costante elastica della molla (e quindi l'energia potenziale elastica iniziale) conoscendo l'altezza finale raggiunta dalla pallina (e quindi l'energia potenziale gravitazionale finale) possiamo scrivere semplicemente:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh$$

poiché inizialmente l'energia è solamente elastica, mentre alla fine è solo gravitazionale.

■ RISOLUZIONE ALGEBRICA

Dalla precedente equazione si può ricavare la costante elastica k:

$$k = \frac{2mgh}{x^2}$$

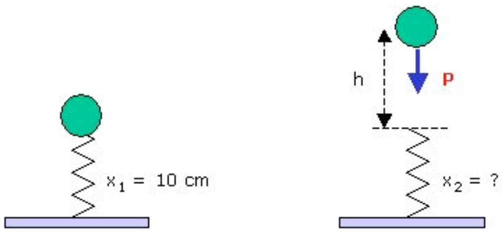
■ RISOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$k = \frac{2mgh}{x^2} = \frac{2 \cdot 0{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}2\ \text{m}}{(0{,}1\ \text{m})^2} \cong 78\ \text{N/m}$$

PROBLEMA

Una sfera pesante poggiata sopra una molla elastica produce una compressione statica di x_1=10 cm. Calcolare la massima compressione della molla x_2 se la sfera cade sopra la molla dall'altezza h=120 cm, nell'ipotesi che la massa della molla sia trascurabile.



SOLUZIONE

Applichiamo il secondo principio della dinamica al corpo poggiato sulla molla per calcolare la sua massa:

$$F = mg \Rightarrow m = \frac{F}{g} = -\frac{k \cdot x_1}{g}$$

dove la F non è altro che la forza elastica prodotta dalla molla (legge di Hooke).

Per calcolare la compressione della molla nel caso in cui la sfera cade sopra la molla dall'altezza h, applichiamo il:

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

$$mg \cdot (h + x_2) = -\frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow -\frac{\cancel{k}x_1}{\cancel{g}} \cdot \cancel{g} \cdot (h + x_2) = -\frac{1}{2}\cancel{k}x_2^2 \Rightarrow hx_1 + x_1x_2 = \frac{1}{2}x_2^2 \Rightarrow x_2^2 - 2x_1x_2 - 2hx_1 = 0$$

Risolviamo l'equazione di 2° grado nell'incognita x_2 così ottenuta:

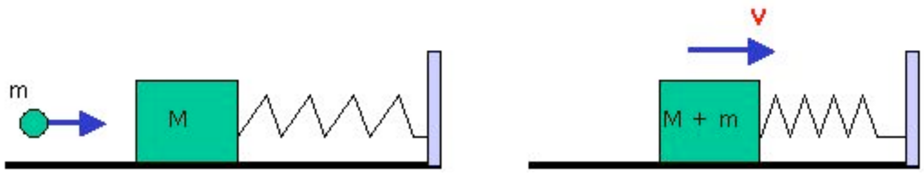
$$x_2^2 - 20x_2 - 2400 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 9600}}{2} = \frac{20 \pm 100}{2} = 60\text{cm}$$

dove abbiamo eliminato la soluzione x_2 = -40 cm perché fisicamente non accettabile.

PROBLEMA

Una pallottola di massa 10 g, sparata contro un blocco di massa 990 g poggiato sopra una superficie priva di attrito e fissato ad una molla di massa trascurabile e k=100 N/m, viene incorporata dal blocco. Se in seguito all'urto la molla subisce una compressione massima di 10 cm, calcolare l'energia potenziale massima della molla e la velocità del blocco subito dopo l'urto.

SOLUZIONE



L'energia potenziale massima viene calcolata attraverso la sua definizione:

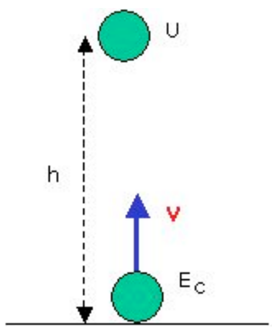
$$U_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 0{,}1^2 = 0{,}5J$$

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica (tutta l'energia cinetica del blocco viene trasferita alla molla sotto forma di energia potenziale elastica) per calcolare la velocità del blocco:

$$E_C = U_e \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot(M+m)\cdot V^2 = U_e \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2\cdot U_e}{M+m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}5}{0{,}9+01}} = 1m/s$$

PROBLEMA

Un corpo di massa 200 g, lanciato verticalmente verso l'alto con velocità di 25 m/s, raggiunge l'altezza massima di 30 m. Calcolare l'energia meccanica perduta per la resistenza dell'aria.



SOLUZIONE

La forza d'attrito è una forza dissipativa, per cui il corpo raggiungerà la massima altezza con un'energia potenziale U inferiore a quella cinetica E_C posseduta all'inizio del moto. Pertanto la quantità $\Delta E_M = E_C - U$ rappresenterà proprio l'energia meccanica dissipata per effetto dell'attrito dell'aria:

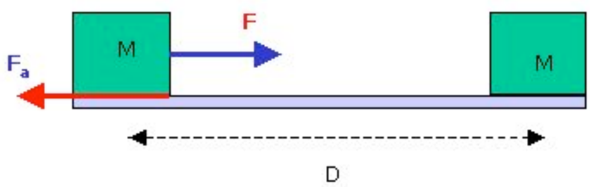
$$\Delta E_M = E_C - U = \frac{1}{2}mV^2 - mgh = \frac{1}{2}\cdot 0{,}2\cdot 25^2 - 0{,}2\cdot 9{,}8\cdot 30 = 3{,}7J$$

PROBLEMA

Una cassa avente la massa di 20 kg viene trascinata per una distanza di 5,0 m sopra una superficie orizzontale con coefficiente d'attrito 0,40 da una forza costante di 200 N nella direzione del moto. Calcolare:

- il lavoro compiuto dalla forza applicata e dalla forza d'attrito
- la velocità finale della cassa nell'ipotesi che la velocità iniziale sia nulla

SOLUZIONE



- Il lavoro compiuto dalla forza F è un lavoro motore, quindi positivo; mentre il lavoro compiuto dalla forza F_a è un lavoro resistente, quindi negativo.

Pertanto:

$$L = F \cdot D = 200 \cdot 5 = 1000J \qquad L_a = -F_a \cdot D = -\mu \cdot M \cdot g \cdot D = -0{,}40 \cdot 20 \cdot 9{,}8 \cdot 5 = -392J$$

- Il lavoro totale compiuto dalle forze che agiscono sul corpo è:

$$L_T = \sum L_i = L - L_a = 1000 - 392 = 608J$$

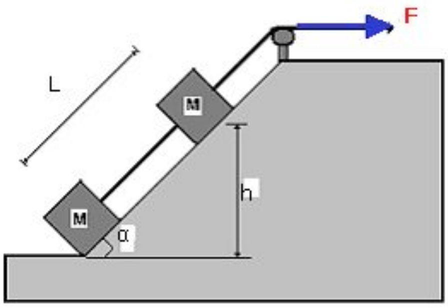
Utilizzando il teorema dell'energia cinetica siamo in grado di calcolare la velocità finale della cassa:

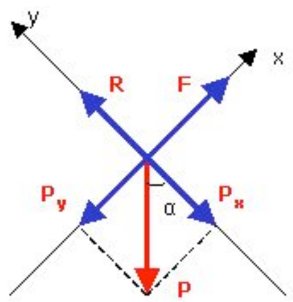
$$L_T = \Delta E_C = E_{C_F} - E_{C_I} = \frac{1}{2} M V^2 - 0 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2L_T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 608}{20}} = 7{,}8m/s$$

PROBLEMA

Un corpo di massa M=15kg è trascinato in salita con velocità costante su una rampa priva di attrito per un tratto L=5.7m fino ad una altezza h=2.5m ,rispetto al punto di partenza, dove si arresta.
Calcolare il lavoro svolto dalla forza peso $\vec{P}$ e dalla forza trainante $\vec{F}$.

SOLUZIONE





Applichiamo la definizione di lavoro per calcolare quello compiuto dalla forza peso:

$$L_P = \vec{P} \bullet \vec{L} = P \cdot L \cdot \cos(90° + \alpha) = -mgL\mathrm{sen}\alpha = -mg\cancel{L}\frac{h}{\cancel{L}} = -mgh = 15 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}5 = -368J$$

$$\text{dove: } \mathrm{sen}\alpha = \frac{h}{L} \qquad \cos(90° + \alpha) = -\mathrm{sen}\alpha$$

Il lavoro totale compiuto da tutte le forze che agiscono sul corpo è zero; infatti dal teorema dell'energia cinetica:

$$L_T = \Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = 0 \quad \text{in quanto} \quad v_i = v_f = 0$$

quindi:

$$L_T = L_P + L_N + L_F = 0 \qquad \text{ma} \qquad L_N = \vec{N} \bullet \vec{L} = N \cdot L \cdot \cos 90° = 0$$

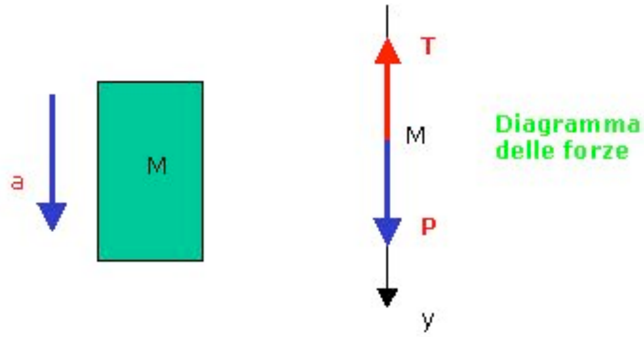
pertanto:

$$L_P + L_F = 0 \Rightarrow \quad L_F = -L_P = 368J$$

PROBLEMA

La cabina di un ascensore M = 500kg sta scendendo con velocità iniziale v_i=4.0m/s quando il sistema di argani che ne controlla la discesa comincia a slittare, lasciandola cadere con accelerazione a=g/5.
Calcolare la velocità finale della cabina dopo una caduta di h=12m.

SOLUZIONE



Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$L_{TOT} = \Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = \frac{1}{2}Mv_f^2 - \frac{1}{2}Mv_i^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2L_{TOT} + Mv_i^2}{M}}$$

Poiché non è noto il lavoro svolto dalle forze che agiscono su M, procediamo nel seguente modo:

$$L_{TOT} = L_T + L_P = 1.2 \cdot 10^4\,J$$

dove:

$$L_P = \vec{P} \bullet \vec{L} = Mg \cdot L \cdot \cos 0° = 5.9 \cdot 10^4\,J \qquad\qquad L_T = \vec{T} \bullet \vec{L} = T \cdot L \cdot \cos 180° = -4.7 \cdot 10^4$$

La tensione T la calcoliamo applicando il 2° principio della dinamica:

$$P - T = Ma \Rightarrow T = Mg - Ma = M \cdot (g - g/5) = \frac{4}{5}g \cdot M = \frac{4}{5} \cdot 9{,}8 \cdot 500 = 3920N$$

In definitiva:

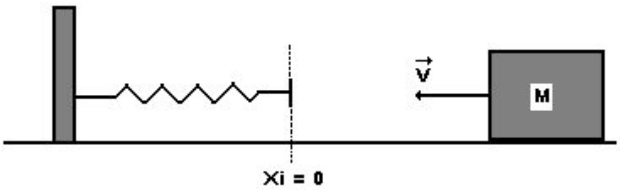
$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^4 + 500 \cdot 4^2}{500}} = 8 m/s$$

Considerazione:

$$\begin{cases} E_{Mi} = \frac{1}{2}Mv_i^2 + Mgh = 62.8 \cdot 10^3 J \\ E_{Mf} = \frac{1}{2}Mv_f^2 = 15.6 \cdot 10^3 J \end{cases} \Rightarrow \Delta E_M = E_{Mf} - E_{Mi} = 47.2 \cdot 10^3 J \Rightarrow$$ cosa rappresenta?

PROBLEMA

Un blocco M=5.7kg scivola, con una velocità v=1.2 m/s, sul piano orizzontale privo di attrito di un tavolo, e comprime una molla di costante elastica k=1500N/m. Per quale massima distanza è compressa la molla?



SOLUZIONE

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica alla massa M:

$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2}Mv_f^2 - \frac{1}{2}Mv_i^2 = -\frac{1}{2}Mv_i^2$$ in quanto $v_f = 0$

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica alla molla:

$$L = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = -\frac{1}{2}kx_f^2$$

Pertanto:

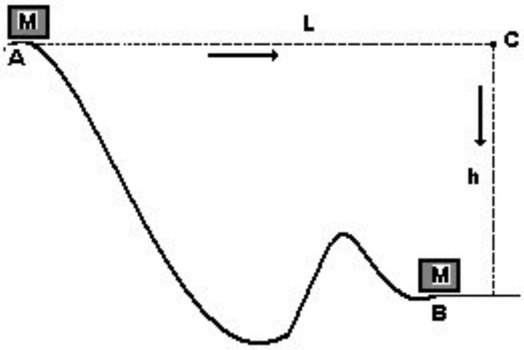
$$-\frac{1}{2}Mv_i^2 = -\frac{1}{2}kx_f^2 \Rightarrow x_f = \sqrt{\frac{Mv_i^2}{k}} = \sqrt{\frac{5{,}7 \cdot 1{,}2^2}{1500}} = 0{,}074m = 7.4cm$$

PROBLEMA

La figura mostra un corpo di massa M=2kg scivola su una superficie priva di attrito dal punto A al punto B, mentre il dislivello verticale è h=0.80m. Quanto lavoro compie il peso di M?

SOLUZIONE

Dall'analisi del problema appare subito evidente la difficoltà nel risolverlo in quanto non conosciamo l'esatta forma del percorso seguito. E anche se la conoscessimo, il calcolo sarebbe comunque complicato dal fatto che l'angolo, che entra nella formula del lavoro, varia continuamente lungo il percorso seguito dal corpo M.

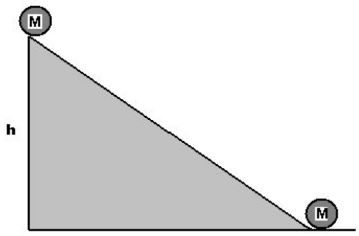


Ma, grazie al fatto che la forza peso P è conservativa, possiamo scegliere un altro percorso tra A e B che faciliti i calcoli. A tal proposito scegliamo il percorso ACB, e su di esso calcoliamo il lavoro svolto da P.

$$L_{AC} = \vec{P} \bullet \vec{L} = Mg \cdot L \cdot \cos 90° = 0$$
$$L_{CB} = \vec{P} \bullet \vec{h} = Mg \cdot h \cdot \cos 0° = 15.7J$$
$$L_{TOT} = L_{AC} + L_{CB} = 15.7J$$

PROBLEMA

Nella figura una pallina di massa m è lasciata andare, da fermo, dalla cima di uno scivolo alto h=8.5m. A che velocità la pallina arriverà a terra, supponendo che l'attrito sia nullo?



SOLUZIONE

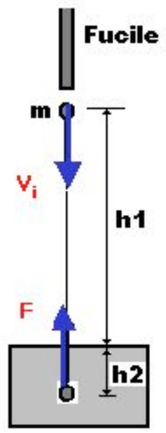
Principio di conservazione dell'energia:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \Rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_f^2 + 0 \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh} = 13m/s$$

Considerazioni:

- La velocità calcolata è la stessa che avrebbe raggiunto la pallina se fosse caduta lungo la verticale h
- La risoluzione di questo problema con le sole leggi della dinamica sarebbe stata più laboriosa.

PROBLEMA



Una sferetta d'acciaio m=5.2g viene sparata verticalmente verso il basso da un'altezza h_1=18m con velocità iniziale v_i=14m/s, per affondare nella sabbia a una profondità h_2=21cm. Calcolare:

1. la variazione di energia meccanica della sferetta
2. la variazione di energia interna del sistema sferetta-Terra-sabbia
3. l'intensità della forza di resistenza media **F** esercitata dalla sabbia sulla sferetta.

SOLUZIONE

1. Variazione dell'energia meccanica $\Rightarrow \Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_P$

Calcoliamo la variazione di energia cinetica:

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

dove l'energia cinetica finale è nulla in quanto all'istante dell'arresto alla profondità h_2 la velocità è zero.

Calcoliamo la variazione di energia potenziale:

$$\Delta E_P = E_{Pf} - E_{Pi} = 0 - mg(h_1 + h_2)$$

dove l'energia potenziale finale è nulla in quanto come riferimento di zero abbiamo scelto il punto di arresto della sferetta.

In definitiva: $\Delta E_M = -\frac{1}{2} m v_i^2 - mg(h_1 + h_2) = -1.44J$

2. Principio di conservazione totale dell'energia :

$$\Delta E_M + \Delta E_{INT} = 0 \Rightarrow \Delta E_{INT} = -\Delta E_M = 1.44J$$

Considerazione: mentre la sferetta penetra nella sabbia, la forza **F** dissipa la sua energia meccanica, trasferendola all'energia interna (energia termica) della sferetta e della sabbia.

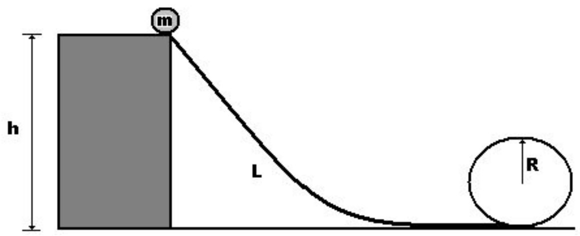
3. L'energia meccanica della sferetta si conserva fino a che essa raggiunge la sabbia. In seguito, mentre la sferetta si sposta di una distanza h_2 dentro la sabbia, la sua energia meccanica varia di ΔE_M. Pertanto il lavoro (negativo in quanto **F** è diretta in senso opposto allo spostamento della sferetta) svolto da **F** è proprio uguale a ΔE_M:

$$L_F = \vec{F} \bullet \vec{h}_2 = F \cdot h_2 \cdot \cos 180° = -F \cdot h_2 \qquad -F \cdot h_2 = \Delta E_M \Rightarrow F = \frac{\Delta E_M}{-h_2} = 6.84N$$

Considerazione:

Si potrebbe trovare **F** anche attraverso l'uso delle leggi della cinematica (ricavare la velocità della sferetta alla superficie della sabbia e il rallentamento nella sabbia) e della dinamica, ma con evidenti calcoli più laboriosi.

PROBLEMA



Una sfera ha una massa m=50g e viene lasciata andare da ferma lungo una pista (h=80cm; R=20cm). La lunghezza del tratto di pista dal punto di partenza al punto più alto del cerchio è L=2.5m.

a) Calcolare, in assenza di attrito, la minima altezza dal suolo da cui si deve lasciare andare la sfera, affinché riesca a compiere il giro del cerchio senza cadere;
b) Lasciando andare la sfera dal punto più alto della pista, calcolare il valore massimo ammissibile per la forza d'attrito, supposta costante lungo tutta la pista, affinché la sfera riesca a percorrere il cerchio senza cadere;
c) Se la forza d'attrito è F_a=0.03N, calcolare la velocità con la quale la sfera sorpassa il punto più alto del cerchio.

SOLUZIONE

a) Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \Rightarrow 0 + mgh_{min} = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg2R \Rightarrow h_{min} = \frac{v_f^2 + 4gR}{2g}$$

ma nel punto più alto del cerchio vale la relazione: $a_C = g \Rightarrow \frac{v^2}{R} = g \Rightarrow v^2 = gR$

per cui: $h_{MIN} = \frac{gR + 4gR}{2g} = \frac{5gR}{2g} = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2}\cdot 20 = 50cm$

b) In questo caso non vale il principio di conservazione dell'energia meccanica, in quanto è presente una forza non conservativa, la forza d'attrito, per cui :

$$1)\quad \Delta E_M = L_a \Rightarrow E_{Mf} - E_{Mi} = L_a \Rightarrow (\frac{1}{2}mv^2 + mg2R) - mgh = -F_a \cdot L$$

dove **F** e **L** sono due vettori paralleli e discordi istante per istante, per cui:

$$\vec{F}_a \bullet \vec{L} = F_a \cdot L \cdot \cos\alpha = -F_a \cdot L$$

pertanto dalla 1) si ricava che:

$$F_a = \frac{2mgh - 4mgr - mv^2}{2L}$$

e tenendo presente che nel punto più alto del cerchio vale la relazione:

$$a_C = g \Rightarrow \frac{v^2}{R} = g \Rightarrow v^2 = gR$$

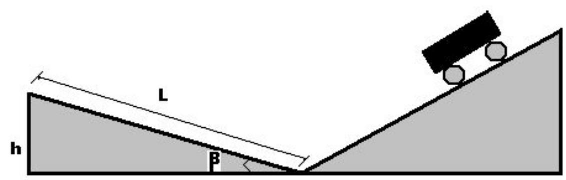
allora:

$$F_a = \frac{2mgh - 4mgR - mgR}{2L} = \frac{2mgh - 5mgR}{2L} = mg \cdot \frac{2h - 5R}{2L} = 0{,}05 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{2 \cdot 0{,}8 - 5 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 2{,}5} = 0.06N$$

c) In corrispondenza di una forza d'attrito pari a 0,03 N la velocità nel punto più alto vale:

$$F_a = \frac{2mgh - 4mgR - mv^2}{2L} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(mgh - mg2R - FL)} =$$
$$\sqrt{\frac{2}{0{,}05} \cdot (0{,}05 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}8 - 0{,}05 \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot 0{,}2 - 0{,}03 \cdot 2{,}5)} = 2.2m/s$$

PROBLEMA



Un automobile fuori controllo sta scendendo con una velocità v=130km/h. Alla fine della discesa c'è una rampa di emergenza in controtendenza, con inclinazione β=15°. Quale deve essere la lunghezza minima L per essere certi che l'automobile arresti la sua corsa?

SOLUZIONE

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 = 0 + mgh$$

ma:

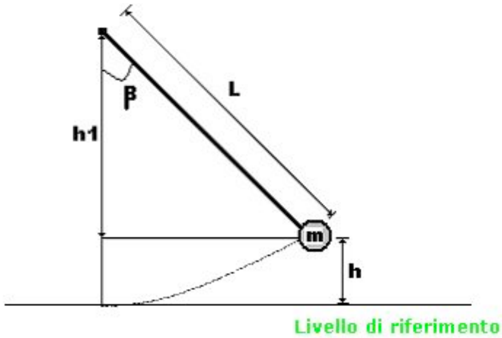
$$h = L \cdot sen\beta$$

per cui:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mgLsen\beta \Rightarrow L = \frac{v_i^2}{2gsen\beta} = 257m$$

PROBLEMA

Un'asticella di massa trascurabile e lunghezza L=2,00m è fissata ad un perno che le consente di descrivere un cerchio in un piano verticale. Una palla pesante di massa m è fissata all'estremità inferiore. L'asticella è spostata lateralmente di un angolo β=30° e qui viene lasciata libera. A che velocità si muoverà la palla passando per il punto più basso?



SOLUZIONE

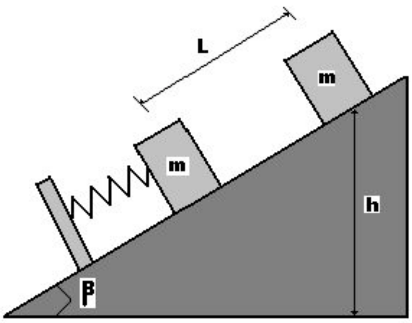
Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow mgh + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

ma: $h = L - h_1 = L - L \cdot \cos\beta = L \cdot (1 - \cos\beta)$ per cui:

$$mgL(1-\cos\beta) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gL(1-\cos\beta)} = 2{,}3m/s$$

PROBLEMA



Un blocco m=2,00kg è appoggiato contro una molla sul piano inclinato, come indicato in figura, con pendenza β=30°, privo di attrito. La molla, avente costante elastica k=19,6 N/cm, è compressa di x=20 cm e poi lasciata libera. Quanto lontano L lungo il piano inclinato viene spinto il blocco?

SOLUZIONE

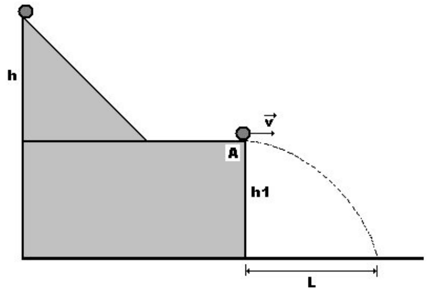
Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = mgh \qquad \text{dove:} \quad h = L \cdot \text{sen}\beta$$

per cui:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgL\text{sen}\beta \Rightarrow L = \frac{kx^2}{2mg\text{sen}\beta} = 4m$$

PROBLEMA



Una pallina, partendo da ferma, scende lungo un piano inclinato (h=70cm) senza attrito, posto su un tavolo ad una altezza h_1=80 cm rispetto al suolo. A quale distanza dal tavolo cadrà la pallina?

SOLUZIONE

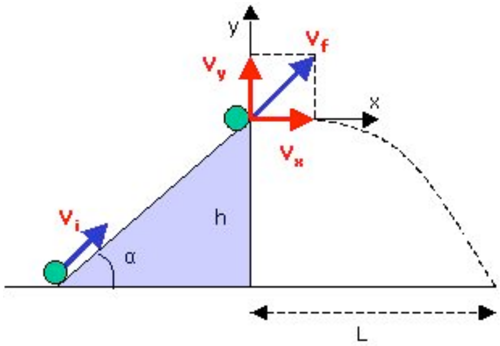
Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica per determinare la velocità della pallina nel punto A, che è indispensabile conoscere per calcolare L:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow mgh + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 3{,}7m/s$$

Il moto di caduta della pallina è quello del proiettile, ossia è caratterizzato da due moti indipendenti, uno in verticale di moto uniformemente accelerato ed uno in orizzontale di moto uniforme, pertanto:

$$\begin{cases} L = vt \\ h_1 = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = 3{,}7 \cdot 0{,}4 = 1{,}5m \\ t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}7}{9{,}8}} = 0{,}4s \end{cases}$$

PROBLEMA



Una pallina viene lanciata con velocità iniziale v_i=5 m/s su una rampa senza attrito (α=30°; h=10 cm), ed uscendo descrive una traiettoria parabolica. A che distanza dalla rampa cadrà la pallina?

SOLUZIONE

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica per determinare la velocità della pallina nel punto più alto della rampa:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh \Rightarrow v = \sqrt{v_i^2 - 2gh} = 4{,}85m/s$$

La traiettoria parabolica della pallina è la composizione di due moti indipendenti, uno in verticale di moto uniformemente accelerato ed uno in orizzontale di moto uniforme, pertanto:

$$\begin{cases} L = v_x t = v_f \cos 30° \cdot t \\ -h = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = v_f \text{sen} 30° \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = 4{,}85 \cdot \cos 30° \cdot 0{,}54 = 2{,}3m \\ t = 0{,}54s \end{cases}$$

dove il tempo t è stato calcolato dalla seconda equazione del sistema che è un'equazione di 2° grado:

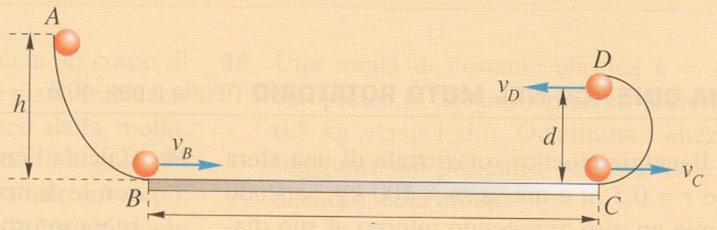
$$gt^2 - 2v_f \text{sen}30° - h = 0 \Rightarrow 9{,}8t^2 - 4{,}9t - 0{,}2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4{,}9 \pm \sqrt{24 + 7{,}8}}{19{,}6} = 0{,}54\text{s}$$

dove abbiamo trascurato la soluzione t = -0,04 s perché fisicamente non accettabile.

PROBLEMA

Una pallina è posta nel punto *A* in cima a uno scivolo, a un'altezza *h* dal suolo. Strisciando senza attrito, cade sino al punto *B* e prosegue la sua corsa nel tratto orizzontale *BC* = *l*, la cui superficie presenta un coefficiente di attrito dinamico *k*. Giunta al punto *C*, percorre una semicirconferenza di diametro *d*, che non presenta attrito.

Qual è l'accelerazione centripeta cui è sottoposta la pallina un istante prima di lasciare la semicirconferenza nel punto *D*?



a) Consideriamo il tratto $A \rightarrow B$:
energia totale a disposizione in A (entrata) = energia spesa in B (uscita) $\Rightarrow$ equazione 1:

$$mgh = \frac{1}{2} mv_B^2$$

b) Consideriamo il tratto $B \rightarrow C$:
energia totale a disposizione in B (entrata) = energia spesa in C (uscita) $\Rightarrow$ equazione 2:

$$\frac{1}{2} mv_B^2 = \frac{1}{2} mv_C^2 + kmgl$$

c) Consideriamo il tratto $C \rightarrow D$:
energia totale a disposizione in C (entrata) = energia spesa in D (uscita) $\Rightarrow$ equazione 3:

$$\frac{1}{2} mv_C^2 = mgd + \frac{1}{2} mv_D^2$$

In definitiva, si ha un sistema di tre equazioni da risolvere rispetto alle incognite del problema:

$$\begin{cases} mgh = \frac{1}{2} mv_B^2 \\ \frac{1}{2} mv_B^2 = \frac{1}{2} mv_C^2 + kmgl \\ \frac{1}{2} mv_C^2 = mgd + \frac{1}{2} mv_D^2 \end{cases}$$

Si può ricavare ora l'accelerazione centripeta richiesta ricordando che $a_{centr} = \frac{v_D^2}{r}$.

Ricavando v_D^2 dall'ultima equazione si ottiene:

$$v_D^2 = v_C^2 - 2gd$$

D'altro canto, dalla seconda equazione si ricava:

$$v_C^2 = v_B^2 - 2kgl$$

e dalla prima:

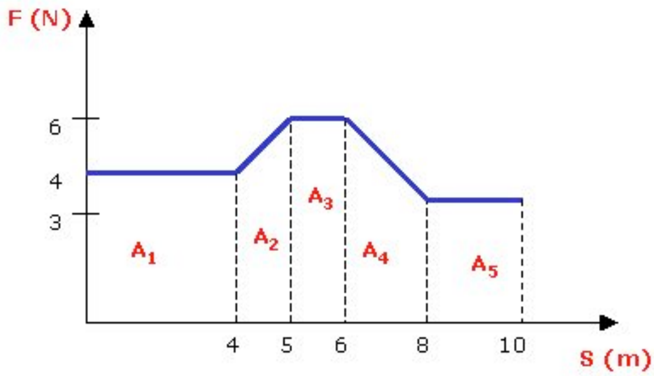
$$v_B^2 = 2gh$$

In definitiva si ottiene:

$$a_{centr} = \frac{2gh - 2kgl - 2gd}{\frac{d}{2}} = \frac{4g\,(h - kl - d)}{d}$$

PROBLEMA

Calcolare il lavoro compiuto dalla forza variabile **F**, la cui componente parallela allo spostamento è mostrata nel grafico in funzione dello spostamento stesso.



SOLUZIONE

Partendo dal concetto che il lavoro compiuto da una forza variabile è dato dall'area sottesa dalla funzione che descrive l'andamento di tale forza, allora:

$$L = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = (4 \cdot 4) + (\frac{6+4}{2} \cdot 1) + (1 \cdot 6) + (\frac{6+3}{2} \cdot 2) + (2 \cdot 3) = 42J$$